Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Locală – Maramureş, Clasa a X-a

Varianta a doua, Soluții

1. a) $a+b+c \geq \dfrac{a^2+b^2+c^2+3}{2} \Leftrightarrow (a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow a=b=c=1$.

b) Din condițiile de existență rezultă domeniul: $x \in \left[0, \log_{\frac{3}{2}} 2\right] = D$.

Ecuația se rescrie: $\left(\sqrt{2^x-1}-1\right)^2+\left(\sqrt{3^x-2^x}-1\right)^2+\left(\sqrt{2^{x+1}-3^x}-1\right)^2=0$, cu unica soluție $x=1 \in D$.

2. Din condițiile de existență: $\begin{cases} 1+x \geq 0 \\ 1-x \leq 0 \\ 8x^3-4x \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$ obținem domeniul: $x \in \left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 1\right] = D$.

Ecuația se rescrie: $x \cdot \left(4x^2-2\right) = \dfrac{2x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} \overset{x \neq 0}{\Leftrightarrow} 4x^2-2 = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$.

Deoarece membrul stâng este o funcție strict crescătoare pe D, iar funcția din membrul drept este strict descrescătoare pe D, ecuația are cel mult o soluție.

Observăm că $x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ verifică ecuația, deci este singura ei soluție.

3. Avem $|z|^2 = z \cdot \overline{z} = 1$. Atunci,

$$\frac{z}{1+z^2} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{z}{1+z^2} = \overline{\frac{z}{1+z^2}} \Leftrightarrow z \cdot \overline{1+z^2} = \overline{z} \cdot \left(1+z^2\right) \Leftrightarrow z+|z|^2 \cdot \overline{z} = \overline{z}+|z|^2 \cdot z \Leftrightarrow z+\overline{z} = \overline{z}+z.$$

Cum ultima relație este adevărată, rezultă că $\dfrac{z}{1+z^2} \in \mathbb{R}$.

Fie $a \in \mathbb{R}$. Căutăm $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$, de modul 1, astfel încât $a = \dfrac{z}{1+z^2}$.

Scriem $z = \cos t + i \cdot \sin t$, cu $t \notin \left\{ \dfrac{(2k+1)\pi}{2} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

$$a = \frac{z}{1+z^2} \Leftrightarrow a = \frac{\cos t + i \cdot \sin t}{1+\cos 2t + i \cdot \sin 2t} = \frac{\cos t + i \cdot \sin t}{2\cos t \cdot (\cos t + i \cdot \sin t)} = \frac{1}{2\cos t}.$$

Obținem $|a| = \dfrac{1}{2|\cos t|} \geq \dfrac{1}{2}$.

Pentru orice $a \in \left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right] \cup \left[\dfrac{1}{2}, \infty\right)$, există $t = \arccos \dfrac{1}{2a}$ astfel încât, pentru $z = \cos t + i \cdot \sin t$, avem

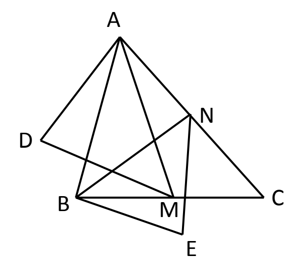
$a=\dfrac{z}{1+z^2}$.

4. Soluția I. Într-un reper oarecare, notăm cu literele mici corespunzătoare afixele punctelor din problemă. Considerăm triunghiul ABC orientat în sens trigonometric.

Avem: $m=\dfrac{b+c}{2},\ n=\dfrac{a+c}{2},\ \dfrac{c-b}{e-b}=\dfrac{b-a}{d-a}=\cos t+i\cdot\sin t$, unde $t=\mu\left(DAB\right)=\mu\left(EBC\right)$.

Notăm $\alpha=\cos(-t)+i\cdot\sin(-t)$ și obținem: $\dfrac{e-b}{c-b}=\dfrac{d-a}{b-a}=\alpha$, deci

$$e=b\cdot(1-\alpha)+c\cdot\alpha \quad \text{și} \quad d=a\cdot(1-\alpha)+b\cdot\alpha.$$



$\triangle ADM\sim\triangle BEN \Leftrightarrow a(e-n)+d(n-b)+m(b-e)=0$.

Înlocuind în egalitatea precedentă m, n, d și e cu valorile de mai sus, obținem:

$\triangle ADM\sim\triangle BEN \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca \Leftrightarrow \triangle ABC$ este echilateral.

Soluția a II-a. Notăm $AB=c,\ BC=a,\ CA=b$.

Din $\triangle ADM\sim\triangle BEN$ rezultă $\dfrac{AM}{c}=\dfrac{BN}{a}$ și $m\left(BAM\right)=m\left(CBN\right)$ (1)

Aplicând teorema sinusurilor în $\triangle AMC$, obținem: $\dfrac{b}{\sin\left(AMC\right)}=\dfrac{AM}{\sin C}$.

Aplicând teorema sinusurilor în $\triangle BNC$, obținem: $\dfrac{a}{\sin\left(BNC\right)}=\dfrac{BN}{\sin C}$.

Rezultă $$\frac{BN\cdot\sin\left(BNC\right)}{a}=\frac{AM\cdot\sin\left(AMC\right)}{b}.$$

Folosind (1) și notând $\mu\left(BAM\right)=\mu\left(CBN\right)=\alpha$, obținem

$$\sin\left(BNC\right)=\frac{c}{b}\cdot\sin\left(AMC\right) \Leftrightarrow \sin(A+B-\alpha)=\frac{c}{b}\cdot\sin(B+\alpha) \Leftrightarrow \sin(A+B-\alpha)=\frac{\sin C}{\sin B}\cdot\sin(B+\alpha)$$

și apoi $\sin(C+\alpha)\cdot\sin B=\sin C\cdot\sin(B+\alpha) \Leftrightarrow \sin\alpha\cdot\sin(B-C)=0 \Leftrightarrow B=C \Leftrightarrow b=c$.

Folosind teorema medianei în (1), obținem: $\dfrac{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}{c^2}=\dfrac{2\left(a^2+c^2\right)-b^2}{a^2}$.

Deoarece $b=c$, rezultă $a=b=c$.